Exercice8

Partie A :

$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}, x\in \square_+$

1) f continue sur $\square_+$ donc f admet une unique primitive F qui prend la valeur 0 en.0 ;

$$F'(x)=f(x)=\frac{1}{1+x^2}, x\in \square_+$$

2) $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[: K(x)=F(tgx)$

a) Posons $U(x)=tgx$ (fonction tangente)

On a : tgx est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

et $U\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=[0,+\infty[$ et F est dérivable sur $[0,+\infty[$.

Conclusion :

K est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

$K'(x)=U'(x).F'(U(x))$

$=\left(1+tg^2x\right)f(tgx)$

$=\left(1+tg^2x\right)\times\dfrac{1}{1+tg^2x}=1$

$\Rightarrow K'(x)=1;\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

b) */ $K'(x)=1\Rightarrow K(x)=x+k$

Or $K(0)=F(tg0)=F(0)=0$, par suite $k=0$.

Donc $\boxed{K(x)=x};x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

*/ $F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=F\left(tg\dfrac{\pi}{3}\right)=K\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow\boxed{F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}}$

*/ $F(1)=F\left(tg\dfrac{\pi}{4}\right)=K\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow\boxed{F(1)=\dfrac{\pi}{4}}$

3) $x\in\square_+;U(x)=F\left(\dfrac{1}{1+x}\right)+F\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$

a/ $x\mapsto g(x)=\dfrac{1}{x+1}$ est dérivable sur $\square_+$

et $g([0,+\infty[)=]0,1]$ .et F dérivable sur $]0,1]\subset\square_+$.

$\Rightarrow F\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ Dérivable sur $\square_+$

*/ $x\mapsto h(x)=\dfrac{x}{x+2}$ est dérivable sur

$[0,+\infty[$ et $h([0,+\infty[)=[0,1[$ .et F dérivable sur $[0,1[$

Donc $F\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$ est dérivable sur $[0,+\infty[$.

Conclusion :

U est dérivable sur $[0,+\infty[$

$U'(x)=\left(\dfrac{1}{1+x}\right)'\times F'\left(\dfrac{1}{1+x}\right)+\left(\dfrac{x}{x+2}\right)'\times F'\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{1+x}\right)'\times f\left(\dfrac{1}{1+x}\right)+\left(\dfrac{x}{x+2}\right)'\times f\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$

$=\dfrac{-1}{(1+x)^2}\left(\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^2}\right)+\dfrac{2}{(x+2)^2}\left(\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2}\right)$

$=-\dfrac{1}{(1+x)^2+1}+\dfrac{2}{(x+2)^2+x^2}$

$=-\dfrac{1}{x^2+2x+2}+\dfrac{2}{2x^2+4x+4}$

$=-\dfrac{1}{x^2+2x+2}+\dfrac{1}{x^2+2x+2}=0\Rightarrow\boxed{U'(x)=0;x\in\square_+}$

Oarray.tn -Aqra Blech- Oarray.tn